Cálculo 1
Banco de ejercicios complementarios para el primer examen departamental.

Dr. Daniel Mocencahua Mora

31 de agosto de 2007

La presente lista complementa los temas de las secciones p1 a p3 del libro de texto. Se integraron dos exámenes departamentales de años anteriores para que el alumno tenga una idea del grado de complejidad requerido para el examen.

1. [1]Ejercicio de funciones

   (a) Sea $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \{x \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq \mathbf{1}\}$ y considérese el subconjunto $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.¿Este conjunto es una función?

   (b) Gráfica la función cuya regla de correspondencia es $f(x) = x - [|x|]$, x$\in \mathbf{R}$

   (c) Sea la regla de correspondencia $f(x) = \begin{cases} 1, \ x \ \in \mathbf{Q} \cap [0,1] \\ 0, \ x \in \mathbf{I} \cap \ [0,1] \end{cases}$, donde $\mathbf{Q}$ es el conjunto de los números racionales y $\mathbf{I}$ es el conjunto de los números irracionales.¿Esta regla es una función? Exprese sus comentarios.

   (d) Un rectángulo tiene 20 m de périmetro. Expresa el área del rectángulo en función de la longitud de uno de sus lados, despues determine el dominio de la función área.

   (e) La función cuya regla de asociación es $f(x) = k(2 - x - x^3)$, $x \in R$ es inyectiva y $f^{-1}(3) = -2$. Encontrar k.

2. [2]Ejercicios de funciones

   (a) Diga si la relación es función a) $\{(x, y) \,|y^2 = 9x^2\}$;b) $\{(x, y) \,|x^2 + y^2 = 25, -4 \leq x \leq 3, y > 0\}$; c) $\{(x, y) \,|x^2 + y^2 = 25, -4 \leq y \leq 3, x > 0\}$

   (b) Encuentre el dominio y el rango de a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si x es un entero} \\ 0 & \text{si x no es un entero} \end{cases}$;b) $f(x) = 1/(x-4)^2$;c) $f(x) = |x-4|$; d) $f(x) = |x| - 4$; e) $f(x) = x/\,|x|$

   (c) Si F es la función dada por $F(x) = 2x^3$ halle a) $F(-2), F(0)$ y $F(1)$; b) $F(x_1), F(x_2)$, $F(x_2 - x_1)$ y $F(x_2) - F(x_1)$; c) $\frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1}$ en la forma más simple, donde $x_2 \neq x_1$

   (d) Demuestre que si $a \neq 0$ la función lineal dada por $f(x) = ax + b$ tiene una función inversa. ¿Tiene inversa una función constante?, ¿Tiene inversa la función identidad?.

   (e) Investigue si la función es par, impar o ninguna de ellas: a) $f(x) = 3x^3 - 4x$; b) $f(x) = 7x^4 - x^2 + 7$; c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$; d) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 4}$; e) $f(x) = |x| + 5$

   (f) Identifique el tipo de función: a) $f(x) = 5^x$; b) $f(x) = x^5$;c) $f(x) = \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$; d) $f(x) = 1 - x - 5x^4$; e) $f(x) = \log_5(x)$; f)$f(x) = \frac{1}{2}\cos(2x)$

   (g) Dada la gráfica de $y = \sqrt{x}$, use las transformadas para graficar $y = \sqrt{x} - 2$, $y = \sqrt{x-2}, y = -\sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}$ y $y = \sqrt{-x}$

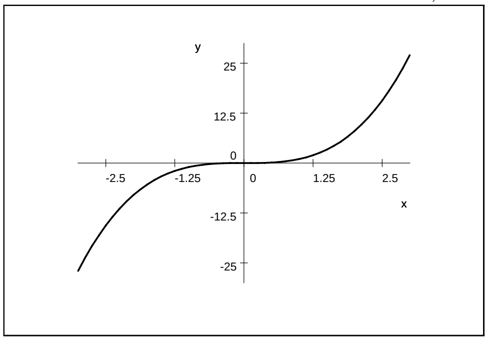
[1]**Ejercicios aportados por el Dr. Marcelino Texis Texis (otoño de 2007)**
[2]**Ejercicios aportados por la M. C. Margarita Amaro Aranda (otoño de 2007)**

1. **Preguntas del primer examen departamental de Cálculo I. 28 de septiembre de 2004.**

   (a) Sea la función $f(x) = 3x^2+5x-3$. Si $x=5$ y $h=-3$ al evaluar $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, se obtiene: (a) $\dfrac{2}{-3}$;(b) $\dfrac{13}{-3}$; (c) $\dfrac{19}{-3}$; (d) $\frac{-78}{-3}$; (e) 25

   (b) Si $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, $g(x) = \dfrac{4}{x^2+1}$ y $c=1$ entonces $(f\circ g)(c)$ es igual a: (a) $(g\circ f)(c)$; (b) $\frac{1}{(g\circ f)(1/2)}$; (c)$(g\circ f)(1/2)$; (d) $(g\circ f)(1)$; (e) $(g\circ f)(1)$.

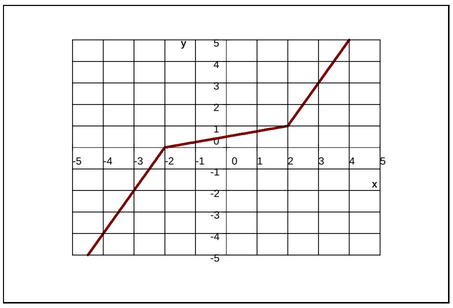
   (c) La gráfica de la función $2x^4+7x^3-x^2+9$,



   tiene las propiedades siguientes: (a) no es creciente; (b) es decreciente; (c) es biyectiva;(d) es par; (e) todas las anteriores.

   (d) Un intervalo para que la función $f(x) = 2x^2+5$ no tenga inversa es: (a) Los reales negativos; (b) los reales positivos; (c) Los reales no negativos; (d) Los reales no positivos; (e) todos los reales.

   (e) La regla de correspondencia de la siguiente función es...



   (a) $f(x) = \begin{cases} 2x+4, & \text{si} \quad x<-2 \\ x+\frac{1}{2}, & \text{si} \quad -2\le x\le 2 \\ 2x-3, & \text{si} \quad 2<x \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad x<-2 \\ \frac{x}{4}+\frac{1}{2} & \text{si} \quad -2\le x\le 2 \\ x-1, & \text{si} \quad 2<x \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} 2x+4, & \text{si} \quad x<-2 \\ \frac{x}{4}+\frac{1}{2}, & \text{si} \quad -2\le x\le 2 \\ 2x+1, & \text{si} \quad 2<x \end{cases}$

   (d) $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & \text{si} \quad x<-2 \\ 1-x^2, & \text{si} \quad -2\le x\le 2 \\ 2x+1, & \text{si} \quad 2<x \end{cases}$

   (e) $f(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad x<-2 \\ \frac{x}{4}+\frac{1}{2} & \text{si} \quad -2\le x\le 2 \\ 2x-3 & \text{si} \quad 2<x \end{cases}$

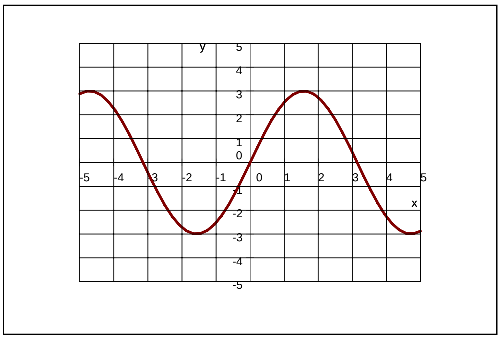
   (f) Al simplificar la expresión

$$\frac{\log A^2 - 2\log B}{\log A^2 + \log\left(\frac{1}{AB}\right)}$$

   se obtiene: (a) 0;(b) 1; (c) 2; (d) -1;(e) no se puede simplificar.

   (g) Las soluciones de la ecuación $6x-5x^2+x^3=0$ hacen verdadera la expresión: (a) $x=0$; (b) $x(x^2-5x+6)=0$; (c) $x=0,1,2$;(d) $x(x-1)(x-2)=0$; (e) $x(x^2+5x+6)=0$.

   (h) La función de la gráfica



es equivalente a la expresión: (a) $\frac{1}{3}senx$;(b) $sen\frac{x}{3}$; (c) $3senx$;(d) $sen3x$;(e) $\frac{senx}{3}$.

(i) La gráfica de la temperatura en grados Farenheith ($°F$) en función de la tempertura en grados centígrados ($°C$) es una recta. Se sabe que $212°F$ y $100°C$ representan la temperatura a la que hierve el agua. De igual manera, $32°F$ y $0°C$ representan el punto de congelación del agua. La pendiente de la gráfica tiene signo: (a) Positivo; (b)Negativo; (c) La pendiente es cero; (d) No se puede saber.

(j) Al despejar x en la expresión: $e^{2x} = e^{x+1}$ se obtiene que x vale: (a) 1; (b) -1; (c) 0; (d) 2; (e) -2

2. **Examen departamental de Cálculo I, del 6 de octubre de 2005.**

Instrucciones: El presente examen consta solo de preguntas abiertas. Los maestros calificarán tanto la solución final como el procedimiento para llegar a ella, por lo que debes entregar tus hojas de respuestas con letra legible y limpias.

(a) Determine si el conjunto es función o no. En caso de serlo determine su dominio.

(a) $\{(x,y) : x^2 + y^2 = 4\}$

(b) $\left\{(x,y) : x = (y+1)^3 - 2\right\}$

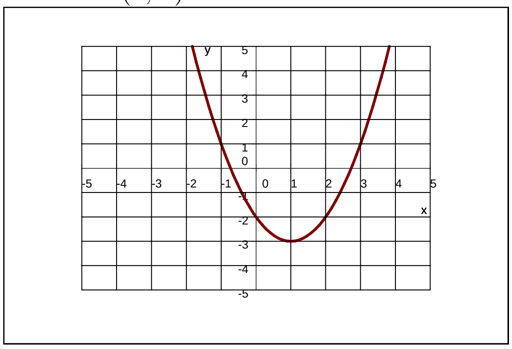
(b) Si $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x - 40}$, $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 - 3x - 5}}$, definir $f+g$, $f-g$, fg y f/g. Escribe los dominios de cada una de ellas.

(c) Define las siguientes funciones y determina su dominio.(a) $f \circ g$; (b) $g \circ f$; (c) $f \circ f$; (d) $g \circ g$. Para $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$.

(d) Simplificar la expresión $\frac{\log A^2 - 2\log B}{\log A^2 + \log\left(\frac{1}{AB}\right)}$.

(e) Despejar x en la expresión: $e^{2x} = e^{x+1}$.

(f) La función de la gráfica es una parábola con vértice en (1,-3).



(i) Escribe la función utilizando transformaciones de $f(x) = x^2$

(ii) Indica un intervalo en que la función es creciente, decreciente, inyectiva, sobreyectiva, biyectiva.

(iii) Si la hay, escribe una inversa para la función.

3. Determine si la función es par o impar o ninguno de esto dos tipos.

(a) $f(y) = \frac{y^3 - y}{y^2 + 1}$; (b) $g(r) = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}$; (c) $f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$

4. Para cada inciso demuestre que f y g son inversas entre sí.

(a) $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = \frac{x+3}{2}$

(b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ y $g(x) = \frac{1-x}{x}$

(c) $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, y $g(x) = \sqrt{x}$

(d) $f(x) = (x+1)^3$, y $g(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$

(e) $f(x) = e^{2x}$, y $g(x) = \frac{1}{2}\ln x$

5. La función **escalón unitario** es una función definida a trozos según la regla de correspondencia: $U(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x < 0 \\ 1, & \text{si} \quad 0 \leq x \end{cases}$. Deibuja su gráfica. Define cada una de las siguientes funciones a trozos y dibuja sus gráficas. (a) $U(x-1)$; (b) $U(x)-1$; (c) $U(x)-U(x-1)$; (d) $xU(x)$; (e) $(x+1)U(x+1)$; $-xU(x)$

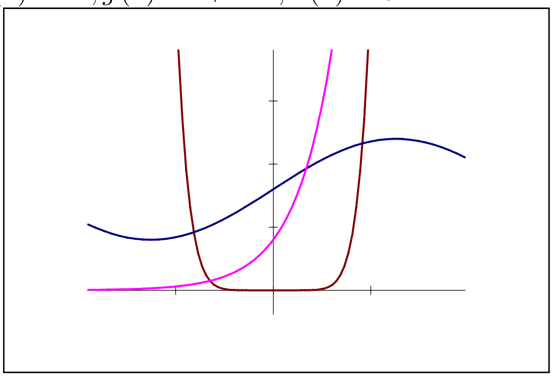
6. La **función signo** está definida por $sgn(x) = \frac{|x|}{x}$. Define cada una de las siguientes funciones a trozos y dibuja sus gráficas. (a) $x \cdot sgn(x)$; (b) $2 - x \cdot sgn(x)$; (c) $x - 2sgn(x)$; (d) $sgn(x+1)$; (e) $sgn(x-1)$; (f) $sgn(x+1) - sgn(x-1)$

7. Defina $sgn(U(x))$ y $U(sgn(x))$ y dibuje sus gráficas.

8. La función máximo entero se define por $\lfloor x \rfloor = n$, si $n \leq x < n+1$, con n entero. Indica su dominio y rango. Gráfica: (a) $\lfloor x \rfloor$; (b) $\lfloor x \rfloor - x$; (c) $\lfloor x - 6 \rfloor$; (d) $sen \lfloor x \rfloor$.

9. Considere el rectángulo definido por $[-3, 3]$ en el eje X y $[-1, 2]$ en el eje Y. Definir funciones a trozos de tal manera que al graficarlas se obtenga (a) la letra W; (b) la letra M.

10. Haz corresponder cada función con su gráfica. Explica la razón de tal selección sin usar calculadora o computadora para graficar: $f(x) = x^8, g(x) = 2+\text{sen}x, h(x) = 8^x$



11. Esboza la gráfica de $e^{|x|}$, y de $\ln|x|$. Son inversas entre sí?

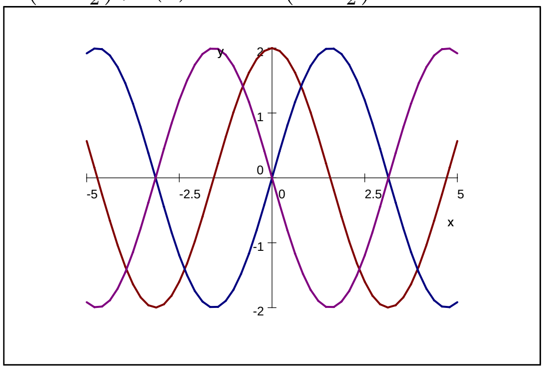
12. Encuentra el valor exacto para cada expresión. No debes usar calculadora: (a) $\log_2 64$; (b) $\ln e^{\sqrt{2}}$; $\log 1.25 + \log 80$; (c) $\log_5 10 + \log_5 20 - 3\log_5 2$; (d) $2^{(\log_2 3 + \log_2 5)}$; (e) $e^{3\ln 2}$

13. ¿Cual es la diferencia entre $\text{sen}x^2$, sen^2x y $\text{sen}(\text{sen}x)$? Expresa cada función como composición.

14. Grafica $\cos|x|$.

15. Considere la función $y = 5 + \cos(3x)$. ¿Cuál es su apmplitud?¿Cuál es su periodo? Traza su gráfica.

16. Haz corresponder las funciones con su gráfica: $f(x) = 2\cos x$, $g(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, $h(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.



17. Las funciones $\text{senh}x$ y $\cos x$, ¿son pares o impares?

18. Demuestre que $\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1$. Haz un listado con otras identidades en las que intervengan las funciones hiperbólicas.

19. Haz una gráfica de $\text{senh}x$ y $\cos x$. ¿la ecuación $\text{senh}x$-$\cos x = 0$, tiene solución?

20. Determina si la proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera, argumenta. Si es falsa explica porqué o da un contrejemplo.

    (a) Si f es uno a uno entonces $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$

    (b) Si $x_1 < x_2$ y f es una función creciente, entonces $f(x_1) > f(x_2)$

(c) Si f es una función entonces $f(s+t) = f(s) + f(t)$

(d) Si $f(s) = f(t)$, entonces $s = t$.

(e) Una recta vertical intersecta la gráfica de una función más de una vez

(f) Siempre se puede dividir entre e^x.

(g) Si $0 < a < b$ entonces $\ln a < \ln b$

(h) $(f \circ (g+h))(x) = (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x)$

(i) $((g+h) \circ f)(x) = (g \circ f)(x) + (h \circ f)(x)$

(j) $\frac{1}{f \circ g}(x) = \left(\frac{1}{f} \circ g\right)(x)$

(k) $\frac{1}{f \circ g}(x) = \left(f \circ \frac{1}{g}\right)(x)$

21. Demuestre que si f y g son funciones se cumple que:

    (a) (I) Si $g \circ f$ es una función inyectiva entonces f es una función inyectiva.

    (II) Si f y g son funciones inyectivas, entonces $g \circ f$ lo es.

22. Supón que $g = h \circ f$. Demuestra que si $f(x) = f(y)$ entonces $g(x) = g(y)$.

23. Determine cuáles de las funciones del presente problemario son inyectivas.

Fecha del primer examen departamental: miércoles 26 de septiembre de 2007. Preguntar un día antes por el salón y horario.

Tiene un peso del 20% de la calificación final y abarca toda la unidad 1